數學傳播 38卷4期, pp. 68-75

$\cos n\theta$、$\sin n\theta$ 表為 $\cos\theta$ 與 $\sin\theta$ 的多項式

葉東進

觀察 $\cos\theta = \cos\theta$, $\cos 2\theta = -1 + 2\cos^2\theta$, $\cos 3\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$, 以及 $\sin\theta = 1\cdot\sin\theta$, $\sin 2\theta = 2\cos\theta\cdot\sin\theta$, $\sin 3\theta = (-1+4\cos^2\theta)\sin\theta$, 我們猜想: 對任意正整數 n, 是否 $\cos n\theta$ 恆可表為一個 $\cos\theta$ 的 n 次多項式, 而 $\sin n\theta$ 恆可表為一個 $\cos\theta$ 的 $n-1$ 次多項式與 $\sin\theta$ 的乘積? 如果答案是肯定的, 多項式的係數之間是否存有關係或規律?

一、

首先,

假若 $\cos n\theta$ 可表為一個 $\cos\theta$ 的 n 次多項式, 記為 $\cos n\theta = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}\cos^k\theta$, 且 $\sin n\theta$ 可表為一個 $\cos\theta$ 的 $n-1$ 次多項式與 $\sin\theta$ 的乘積, 記為 $\sin n\theta = \Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}\cos^k\theta\Big)\sin\theta$,

由

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cdot\cos\theta - \sin n\theta\cdot\sin\theta$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\cos(n+1)\theta &= \Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\cos^k\theta\Big)\cos\theta - \Big(\sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}\cos^k\theta\Big)\sin^2\theta\\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\cos^{k+1}\theta - \Big(\sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}\cos^k\theta\Big)(1-\cos^2\theta)\end{aligned}$$

則

$$\cos(n+1)\theta = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}\cos^k\theta \quad \text{(經合併整理而得如此記述)}$$

所以 $\cos(n+1)\theta$ 也可表為一個 $\cos\theta$ 的 $n+1$ 次多項式。

又由

$$\sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cdot \cos\theta + \cos n\theta \cdot \sin\theta$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sin(n+1)\theta &= \Big(\sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}\cos^k\theta\Big)\sin\theta\cos\theta + \Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\cos^k\theta\Big)\sin\theta \\ &= \Big(\sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}\cos^{k+1}\theta + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\cos^k\theta\Big)\sin\theta\end{aligned}$$

則

$$\sin(n+1)\theta = \Big(\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\cos^k\theta\Big)\sin\theta \quad \text{(經合併整理而得如此記述)}$$

所以 $\sin(n+1)\theta$ 也可表爲一個 $\cos\theta$ 的 n 次多項式與 $\sin\theta$ 的乘積。

由於 $\cos 2\theta = -1 + 2\cos^2\theta$, $\sin 2\theta = 2\cos\theta \cdot \sin\theta$ 滿足了初始條件, 因此由數學歸納, 我們同時證得如下結論:

> 對任意正整數 n, $\cos n\theta$ 恆可表爲一個 $\cos\theta$ 的 n 次多項式, 且 $\sin n\theta$ 恆可表爲一個 $\cos\theta$ 的 $n-1$ 次多項式與 $\sin\theta$ 的乘積。

二、

其次,
根據上述結論, 我們取

$$\cos(n+1)\theta = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}\cos^k\theta, \quad \cos n\theta = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\cos^k\theta$$

及

$$\cos(n-1)\theta = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}\cos^k\theta$$

由和差化積公式, 有

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cdot \cos\theta$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}\cos^k\theta + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}\cos^k\theta = 2\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\cos^{k+1}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}(a_{n+1,k}+a_{n-1,k})\cos^k\theta+(a_{n+1,n+1}\cos^{n+1}\theta-a_{n-1,n}\cos^n\theta)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}2a_{n,k-1}\cos^k\theta+2a_{n,n}\cos^{n+1}\theta \quad (\text{註: } a_{n-1,n}=0,\ a_{n,-1}=0)$$

比較等式的兩邊, 得

$$\begin{cases} a_{n+1,k}+a_{n-1,k}=2a_{n,k-1}, k=0,1,2,\ldots,n \\ a_{n+1,n+1}=2a_{n,n} \end{cases}$$

由於 $a_{n-1,n+1}=0$, 上面二式可合併成一式:

$$a_{n+1,k}+a_{n-1,k}=2a_{n,k-1}, \qquad k=0,1,2,\ldots,n+1 \tag{A}$$

當 $k=0$ 時, 因 $a_{n,-1}=0$, 因此有 $a_{n+1,0}=-a_{n-1,0}$, 又由於 $a_{1,0}=0$ 及 $a_{0,0}=1$, 因而得到

$$\begin{cases} a_{1,0}=a_{3,0}=a_{5,0}=\cdots=a_{2m-1,0}=0, m\text{為正整數} \\ a_{0,0}=1, a_{2,0}=-1, a_{4,0}=1, a_{6,0}=-1,\cdots \end{cases} \tag{B}$$

利用 (A) 式及 (B) 式中的結果, 我們可以得到如下的結論:

> $a_{n,k}=0$, 當 n 爲奇數且 k 爲偶數, 或 n 爲偶數且 k 爲奇數。隨之, 我們得到: 當 n 爲偶數時, $\cos n\theta$ 恆可表爲一個純 $\cos^2\theta$ 的多項式, 同時, 我們也可造出一個 $\cos n\theta$ 表爲 $\cos\theta$ 之 n 次多項式的係數列表:

表 1.

	$\cos^0\theta$	$\cos^1\theta$	$\cos^2\theta$	$\cos^3\theta$	$\cos^4\theta$	$\cos^5\theta$	$\cos^6\theta$	$\cos^7\theta$
$\cos 0\theta$	1							
$\cos\theta$	0	1						
$\cos 2\theta$	-1	0	2					
$\cos 3\theta$	0	-3	0	4				
$\cos 4\theta$	1	0	-8	0	8			
$\cos 5\theta$	0	5	0	-20	0	16		
$\cos 6\theta$	-1	0	18	0	-48	0	32	
$\cos 7\theta$	0	-7	0	56	0	-112	0	64

三、

至於 $\sin n\theta$ 的情形, 由前面證得的結論, 我們可以取

$$\sin(n+2)\theta = \Big(\sum_{k=0}^{n+1} b_{n+1,k}\cos^k\theta\Big)\sin\theta, \qquad \sin(n+1)\theta = \Big(\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\cos^k\theta\Big)\sin\theta$$

及

$$\sin n\theta = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}\cos^k\theta\Big)\sin\theta$$

由和差化積公式, 有

$$\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = 2\sin(n+1)\theta\cdot\cos\theta$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n+1} b_{n+1,k}\cos^k\theta + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}\cos^k\theta = 2\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\cos^{k+1}\theta$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \qquad & \sum_{k=0}^{n}(b_{n+1,k}+b_{n-1,k})\cos^k\theta + (b_{n+1,n+1}\cos^{n+1}\theta - b_{n-1,n}\cos^n\theta) \\ & = \sum_{k=0}^{n} 2b_{n,k-1}\cos^k\theta + 2b_{n,n}\cos^{n+1}\theta \quad (\text{註: } b_{n-1,n}=0,\ b_{n,-1}=0)\end{aligned}$$

比較等式的兩邊, 得

$$\begin{cases} b_{n+1,k}+b_{n-1,k} = 2b_{n,k-1}, & k=0,1,2,\ldots,n \\ b_{n+1,n+1} = 2b_{n,n} \end{cases}$$

由於 $b_{n-1,n+1}=0$, 上面二式可合併成一式:

$$b_{n+1,k}+b_{n-1,k} = 2b_{n,k-1}, \quad k=0,1,2,\ldots,n+1 \tag{C}$$

利用此式的結論, 我們也可以造出一個 $\sin n\theta$ 表爲 $\cos\theta$ 之 $n-1$ 次多項式與 $\sin\theta$ 的乘積時, 其中的 $\cos\theta$ 的多項式的係數列表:

表 2.

	$\cos^0\theta$	$\cos^1\theta$	$\cos^2\theta$	$\cos^3\theta$	$\cos^4\theta$	$\cos^5\theta$	$\cos^6\theta$	$\cos^7\theta$
$\sin 0\theta$	0							
$\sin\theta$	1	0						
$\sin 2\theta$	0	2	0					
$\sin 3\theta$	-1	0	4	0				
$\sin 4\theta$	0	-4	0	8	0			
$\sin 5\theta$	1	0	-12	0	16	0		
$\sin 6\theta$	0	6	0	-32	0	32	0	
$\sin 7\theta$	-1	0	24	0	-80	0	64	0

四、

我們再進一步觀察 $\sin\theta=\sin\theta$, $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ 及 $\sin 5\theta=5\sin\theta-20\sin^3\theta+16\sin^5\theta$, 便猜想: 當 n 爲奇數時, 是否 $\sin n\theta$ 恆可表爲一個 $\sin\theta$ 的 n 次多項式?

設 n 爲奇數, 並假定 $\sin n\theta$ 可表爲一個 $\sin\theta$ 的 n 次多項式, 記爲 $\sin n\theta=\sum\limits_{k=0}^{n}c_{n,k}\sin^k\theta$, 此時 $n+1$ 爲偶數, 所以 $\cos(n+1)\theta$ 可表爲一個 $\cos^2\theta$ 的多項式, 又因爲 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$, 因此可將 $\cos(n+1)\theta$ 記爲 $\cos(n+1)\theta=\sum\limits_{k=0}^{n+1}d_{n+1,k}\sin^k\theta$。(註: 此時 $d_{n+1,k}=(-1)^{\frac{n+1}{2}}a_{n+1,k}$, 見第五段)。

由和差化積公式知

$$\sin(n+2)\theta-\sin n\theta=2\cos(n+1)\theta\cdot\sin\theta$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sin(n+2)\theta&=\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}\sin^k\theta+\sum_{k=0}^{n+1}2d_{n+1,k}\sin^{k+1}\theta\\&=\sum_{k=0}^{n+2}c_{n+2,k}\sin^k\theta\quad\text{(經合併整理而得如此記述)}\end{aligned}$$

所以, $\sin(n+2)\theta$ 亦可表爲一個 $\sin\theta$ 的 $n+2$ 次多項式。故由數學歸納, 得到:

當 n 爲奇數時, $\sin n\theta$ 恆可表爲一個 $\sin\theta$ 的 n 次多項式。

由上面結論, 對任意正整數 n, 我們取

$$\sin(2n+1)\theta = \sum_{k=0}^{2n+1} c_{2n+1,k}\sin^k\theta, \qquad \sin(2n-1)\theta = \sum_{k=0}^{2n-1} c_{2n-1,k}\sin^k\theta$$

及

$$\cos 2n\theta = \sum_{k=0}^{2n} d_{2n,k}\sin^k\theta$$

由和差化積公式知

$$\sin(2n+1)\theta - \sin(2n-1)\theta = 2\cos 2n\theta\cdot\sin\theta$$

所以

$$\sum_{k=0}^{2n+1} c_{2n+1,k}\sin^k\theta - \sum_{k=0}^{2n-1} c_{2n-1,k}\sin^k\theta = 2\sum_{k=0}^{2n} d_{2n,k}\sin^{k+1}\theta$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \qquad & \sum_{k=0}^{2n}(c_{2n+1,k}-c_{2n-1,k})\sin^k\theta + (c_{2n+1,2n+1}\sin^{2n+1}\theta + c_{2n-1,2n}\sin^{2n}\theta)\\ &= \sum_{k=0}^{2n} 2d_{2n,k-1}\sin^k\theta + 2d_{2n,2n}\sin^{2n+1}\theta \quad (\text{註: } c_{2n-1,2n}=0)\end{aligned}$$

比較等式的兩邊, 得

$$\begin{cases} c_{2n+1,k} - c_{2n-1,k} = 2d_{2n,k-1}, & k = 0,1,2,\ldots,2n \\ c_{2n+1,2n+1} = 2d_{2n,2n} \end{cases}$$

由於 $c_{2n-1,2n+1}=0$, 上面二式可合併成一式:

$$c_{2n+1,k} - c_{2n-1,k} = 2d_{2n,k-1}, \quad k = 0,1,2,\ldots,2n+1 \tag{D}$$

利用式 (D), 可以造出 $\sin(2n-1)\theta$ 表爲 $\sin\theta$ 的多項式的係數列表:

表 3.

	$\sin^0\theta$	$\sin^1\theta$	$\sin^2\theta$	$\sin^3\theta$	$\sin^4\theta$	$\sin^5\theta$	$\sin^6\theta$	$\sin^7\theta$
$\sin\theta$	0	1						
$\sin 3\theta$	0	3	0	-4				
$\sin 5\theta$	0	5	0	-20	0	16		
$\sin 7\theta$	0	7	0	-56	0	112	0	-64

五、

對奇數 $2n+1$, 我們有 $\sin(2n+1)\theta = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} c_{2n+1,k}\sin^k\theta$ 及 $\cos(2n+1)\theta = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1,k}\cos^k\theta$, 當觀察:

$$\begin{cases}\cos 3\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta \\ \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}\cos 5\theta = 5\cos\theta - 20\cos^3\theta + 16\cos^5\theta \\ \sin 5\theta = 5\sin\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^5\theta\end{cases}$$

時, 我們不免猜想: 對任意正整數 n, 是否恆有 $c_{2n+1,k} = (-1)^n a_{2n+1,k}$?

而對於偶數 $2n$, 我們有 $\cos 2n\theta = \sum\limits_{k=0}^{2n} d_{2n,k}\sin^k\theta$ 及 $\cos 2n\theta = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_{2n,k}\cos^k\theta$。當觀察:

$$\begin{cases}\cos 2\theta = -1 + 2\cos^2\theta \\ \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}\cos 4\theta = 1 - 8\cos^2\theta + 8\cos^4\theta \\ \cos 4\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta\end{cases}$$

時, 我們也猜想: 對任意正整數 n, 是否恆有 $d_{2n,k} = (-1)^n a_{2n,k}$?

由和差化積公式知

$$\cos(2n+2)\theta - \cos 2n\theta = -2\sin(2n+1)\theta\cdot\sin\theta$$

所以

$$\sum_{k=0}^{2n+2} d_{2n+2,k}\sin^k\theta - \sum_{k=0}^{2n} d_{2n,k}\sin^k\theta = -2\sum_{k=0}^{2n+1} c_{2n+1,k}\sin^{k+1}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{2n+2}(d_{2n+2,k} - d_{2n,k})\sin^k\theta = -2\sum_{k=0}^{2n+2} c_{2n+1,k-1}\sin^k\theta$$

(註: $d_{2n,2n+1} = d_{2n,2n+2} = 0$, $c_{2n+1,-1} = 0$)

比較等式的兩邊, 得

$$d_{2n+2,k} - d_{2n,k} = -2c_{2n+1,k-1}, \quad k = 0,1,2,\ldots,2n+2 \tag{E}$$

現在, 我們同時有式 (D) 及式 (E), 即

$$\begin{cases} c_{2n+1,k} - c_{2n-1,k} = 2d_{2n,k-1} \\ d_{2n+2,k} - d_{2n,k} = -2c_{2n+1,k-1}\end{cases} \tag{F}$$

假若 $\begin{cases} c_{2n-1,k} = (-1)^{n-1}a_{2n-1,k} \\ d_{2n,k-1} = (-1)^n a_{2n,k-1}\end{cases}$, 則由 (F),

$$\begin{aligned} c_{2n+1,k} &= (-1)^{n-1}a_{2n-1,k} + 2(-1)^n a_{2n,k-1} \\ &= (-1)^n(-a_{2n-1,k} + 2a_{2n,k-1}) \end{aligned}$$

但由式 (A) 知 $-a_{2n-1,k}+2a_{2n,k-1}=a_{2n+1,k}$

所以有 $c_{2n+1,k}=(-1)^n a_{2n+1,k}$

又, 假若 $\begin{cases} c_{2n+1,k-1}=(-1)^n a_{2n+1,k-1} \\ d_{2n,k}=(-1)^n a_{2n,k} \end{cases}$, 則由 (F),

$$\begin{aligned} d_{2n+2,k} &= (-1)^n a_{2n,k}-2(-1)^n a_{2n+1,k-1} \\ &= (-1)^n (a_{2n,k}-2a_{2n+1,k-1}) \end{aligned}$$

但由式 (A) 知 $a_{2n,k}-2a_{2n+1,k-1}=-a_{2n+2,k}$
所以有 $d_{2n+2,k}=(-1)^{n+1}a_{2n+2,k}$
因此, 經式 (F) 的交錯遞推, 由數學歸納, 即證得:

$$\begin{cases} c_{2n+1,k}=(-1)^n a_{2n+1,k} \\ d_{2n,k}=(-1)^n a_{2n,k} \end{cases}$$

六、

在 (表1.) 中, 每一行的非零數字的出現都是具規律性的。除了 $+$, $-$ 號的交錯呈現之外, 若僅考慮它們的絕對值, 並且從階差數列的觀點來看, 則有

(1) $\cos^0\theta$ 所在的第 1 行數列: $1,1,1,\ldots$, 它是一個零階差數列, 其通項爲 1。

(2) $\cos^1\theta$ 所在的第 2 行數列: $1,3,5,\ldots$, 它是一個一階差數列, 其通項爲 $2n-1$。

(3) $\cos^2\theta$ 所在的第 3 行數列: $2,8,18,\ldots$, 它是一個二階差數列, 其通項爲 $2\sum\limits_{m=1}^{n}(2m-1)=2n^2$。

(4) $\cos^3\theta$ 所在的第 4 行數列: $4,20,56,\ldots$, 它是一個三階差數列, 其通項爲 $2\sum\limits_{m=1}^{n}2m^2=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$。

(5) $\cos^4\theta$ 所在的第 5 行數列: $8,48,160,\ldots$, 它是一個四階差數列, 其通項爲 $2\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{2}{3}m(m+1)(2m+1)=\frac{2}{3}(n+1)\cdot n(n+1)(n+2)$。

一般, $\cos^k\theta$ 所在的第 $k+1$ 行數列: $2^{k-1},\ldots$, 它是一個 k 階差數列, 其通項可表爲一個 n 的 k 次多項式。只要知道第 k 行的數列通項 (記爲 $A_k(n)$), 經由式 (A) 即可遞推出第 $k+1$ 行的數列通項 (記爲 $A_{k+1}(n)$) 而有: $A_{k+1}(n)=2\sum\limits_{m=1}^{n}A_k(m)$。(註: 此處之正整數 n 與上述 $a_{n,k}$ 中的 n 無關)

—本文作者爲國立科學園區實驗高中退休數學教師—